



# ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ

## “Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ”

www.elp.gr

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ 2018-2019

### ΘΕΜΑ Α

**A1**

- 1) Λ
- 2) Σ
- 3) Λ
- 4) Σ
- 5) Λ
- 6) Σ
- 7) Λ

**A2**

$\alpha \rightarrow 2$

$\beta \rightarrow 7$

$\gamma \rightarrow 1$

$\delta \rightarrow 5$

$\varepsilon \rightarrow 6$

**A3**

$\alpha \rightarrow 4$

$\beta \rightarrow 1$

$\gamma \rightarrow 3$

$\delta \rightarrow 2$

### ΘΕΜΑ Β

**B1**

$$E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{(B+\beta) \cdot U}{2} = \frac{(\sqrt{27} + \sqrt{12}) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\text{Άρα } E_{\text{τραπεζίου}} = 3E_{\text{τετραγώνου}}$$

**B2**

$$\frac{x^6}{x^3y^7} \cdot \frac{x^{12}y^4}{16x^{12}y^8} \cdot y^{14} = \frac{x^{18}y^4}{16x^{15}y^{15}} \cdot y^{14} = \frac{x^{18} \cdot y^{18}}{16x^{15}y^{15}} = \frac{1}{16} \cdot x^3y^3 = \frac{1}{16} \cdot (xy)^3 = \frac{1}{16} \cdot 4^3 = \frac{1}{16} \cdot 64 = 4$$

**B3**

$$\left. \begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ -3 < y < 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -6 > -3x > -12 \\ -6 < 2y < 8 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$-12 < -3x < -6$$

$$\Rightarrow -6 < 2y < 8$$

---


$$-18 < -3x + 2y < 2$$

Άρα η τιμή της παραπάνω παράστασης είναι μεταξύ των αριθμών -18 και 2

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1**

$$\alpha - \beta = \chi^3 - (\chi^2 - \chi + 1) = \chi^3 - \chi^2 + \chi - 1 = \chi^2(\chi - 1) + \chi - 1 = (\chi - 1) \cdot (\chi^2 + 1)$$

**Γ2**

Αν  $\chi > 1$  τότε  $\chi - 1 > 0$

επομένως  $(\chi - 1)(\chi^2 + 1) > 0$  αφού  $\chi^2 + 1 > 0$

Άρα  $\alpha - \beta > 0 \Rightarrow \alpha > \beta$

**Γ3**

Έχουμε από το Γ1 ότι

$$\alpha - \beta = (\chi - 1)(\chi^2 + 1)$$

θέλουμε  $(\chi - 1)(\chi^2 + 1) = 0$

$$\chi - 1 = 0 \text{ ή } \chi^2 + 1 = 0$$

$$\chi = 1 \text{ ή } \chi^2 = -1 \text{ (ΑΔΥΝΑΤΗ)}$$

**Γ4**

i) Οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A είναι  $x \neq 1$ ,

$$A = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η παράσταση B είναι  $x \neq -1$ ,

$$B = \frac{\alpha + \beta - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^3 + x^2 - x + 1 - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1) - 1(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$$

ii)

$$A \cdot B = \frac{x^2+1}{x-1} \cdot (x-1) = x^2+1$$

Θέλουμε  $A \cdot B = 3x^2 - 7x + 7 = >$

$$x^2 + 1 = 3x^2 - 7x + 7 \Rightarrow x^2 + 1 - 3x^2 + 7x - 7 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1 > 0$$

Άρα έχουμε 2 λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1**

Αφού το 0 είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας A τότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Άρα  $OA = OE$



# ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ

## “Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ”

www.elp.gr

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ 2018-2019

ή

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $\triangle O\Delta A$  και  $\triangle O\Delta E$  τα οποία είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και

α)  $OA$ : κοινή

β)  $\Delta\hat{A}O = O\hat{A}G$  (αφού  $OD$  διχοτόμος της  $\hat{A}$ )

Άρα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα επομένως  $OD = OE$

$\triangle$   
 **$\Delta 2$**   $\triangle$

$BM = OM$  γιατί είναι ορθογώνια και

α)  $OM$ : κοινή

β)  $BM = MG$  (αφού  $M$  μέσο της  $BG$ )

Άρα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα δηλαδή  $OB = OG$

**$\Delta 3$**

$\triangle B\hat{O} = \triangle E\hat{O}G$  γιατί είναι ορθογώνια και

α)  $OD = OE$  (από  $\Delta 1$  ερώτημα)

β)  $OB = OG$  (από  $\Delta 2$  ερώτημα)

Άρα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα επομένως  $DB = GE$

**$\Delta 4$**

Στα ορθογώνια  $\triangle A\hat{D}O$  και  $\triangle A\hat{O}E$  οι  $DL$ ,  $EL$  είναι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις υποτεινούς τους.

Επομένως  $DL = \frac{AO}{2}$  και  $EL = \frac{AO}{2}$

άρα  $DL = EL$



# ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ

## “Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ”

www.elp.gr

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ 2018-2019

**Δ5**

Τα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΑΟ.

Άρα  $K\Lambda = \frac{AO}{2}$  και  $K\Lambda \parallel \Delta O$

$\triangle AK\Lambda$  όμοιο με  $\triangle A\Delta O$  γιατί

α)  $\hat{\Delta A O}$  κοινή γωνία

β)  $\hat{AK\Lambda} = \hat{A\Delta O}$  εντός εκτός και επί τα αυτά

οι λόγοι ομοιότητας είναι

$$\lambda = \frac{AK}{A\Delta} = \frac{A\Lambda}{AO} = \frac{K\Lambda}{\Delta O} \text{ και αφού } AK = \frac{AO}{2}$$

τότε ο λόγος ομοιότητας είναι  $\lambda = \frac{AK}{A\Delta} = \frac{1}{2}$