ΘΕΜΑ Α

A_1 i) $\left(4\alpha+\frac{1}{2}\right)^2=16\alpha^2+4\alpha+\frac{1}{4}$

ii) $(3\alpha-2\beta)^2=9\alpha^2-12\alpha\beta+4\beta^2$

iii) $(2\alpha+3\beta)(2\alpha-3\beta)=4\alpha^2-9\beta^2$

iv) $(\alpha^2x^3+\beta^2y^4)(\alpha^2x^3-\beta^2y^4)=\alpha^4x^6-\beta^4y^8$

A_2
1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Λ

A_3 i)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2 &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\right)\\ &= \cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta+\cancel{\beta^2}-\cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta-\cancel{\beta^2}\\ &= 4\alpha\beta\end{aligned}$$

ii) $A=4\ \dfrac{2015}{2014}\cdot\dfrac{2014}{2015}=4$

ΘΕΜΑ Β

B_1 $\alpha=\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{36}}}=\sqrt{1+\sqrt{3+6}}=\sqrt{1+\sqrt{9}}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$$\beta=\frac{4^{10}}{2^{18}}=\frac{\left(2^2\right)^{10}}{2^{18}}=\frac{2^{20}}{2^{18}}=2^2=4$$

$P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει διπλή ρίζα άρα

$$\Delta=0 \Leftrightarrow$$
$$\beta^2-4\alpha\gamma=0 \Leftrightarrow$$
$$4^2-4\cdot 2\cdot \gamma=0 \Leftrightarrow$$
$$16=8\gamma \Leftrightarrow$$
$$\gamma=2$$

B$_2$ i) $Q(x)=P(x)-(x+2)^2-x^2$

$Q(x)=2x^2+4x+2-x^2-4x-4-x^2$

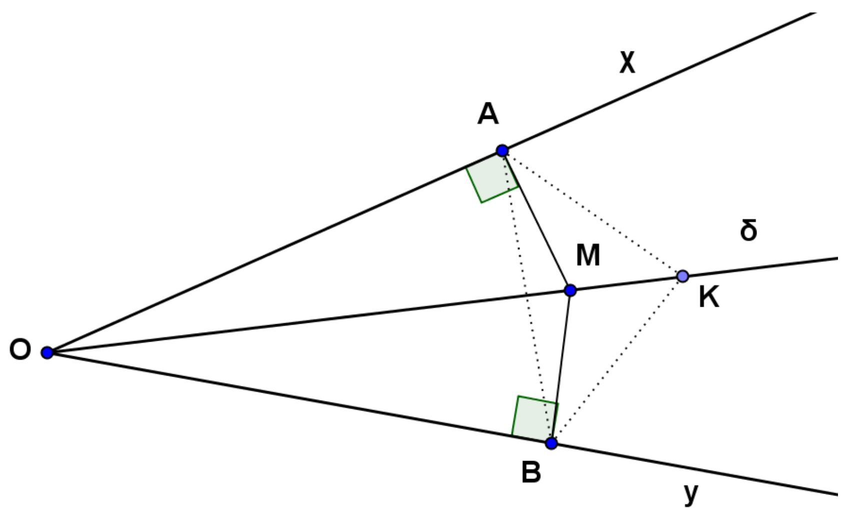
$Q(x)=-2$ Σταθερό

ii) $x^2=Q^2(x)\Leftrightarrow x^2=(-2)^2 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

iii) Επειδή $Q(x)=-2$ σταθερό, θα έχει σταθερή τιμή για κάθε x.

Άρα και για $x=2015^{2016}$ θα είναι $Q\left(2015^{2016}\right)=-2<0$

ΘΕΜΑ Γ



$Γ_1$ Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $O\overset{\triangle}{A}M$ και $O\overset{\triangle}{M}B$ τα οποία έχουν:

α) $\widehat{A}=\widehat{B}=90^O$

β) ΟΜ κοινή πλευρά

γ) $A\widehat{O}M = M\widehat{O}B$ γιατί ΟΜ διχοτόμος της $A\widehat{O}B$

Άρα $O\overset{\triangle}{A}M = O\overset{\triangle}{M}B$ επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα άρα ΑΜ=ΜΒ δηλ. $A\overset{\triangle}{M}B$ ισοσκελές

$Γ_2$ Από την προηγούμενη σύγκριση προκύπτει ότι $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$ επομένως ΟΜ διχοτόμος της $A\widehat{M}B$

$Γ_3$ Το $A\overset{\triangle}{M}B$ είναι ισοσκελές και OM διχοτόμος της $A\overset{\triangle}{M}B$ επομένως είναι και ύψος άρα $OM \perp AB$

$Γ_4$ Αφού ΚΑ=ΚΒ τότε το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Από το $Γ_3$ προκύπτει ότι η μεσοκάθετος του ΑΒ είναι η ΟΜ άρα το Κ ανήκει στο ΟΜ.

<u>Θέμα Δ</u>

$Δ_1$ Τα $O\overset{\triangle}{A}B$ και $O\overset{\triangle}{Γ}Δ$ είναι όμοια γιατί έχουν

α) $\widehat{A}=\widehat{Γ}$ (εντός εναλλάξ των ΔΓ//ΑΒ με τέμνουσα την ΑΓ)

β) $\widehat{B}=\widehat{Δ}$ (εντός εναλλάξ των ΔΓ//ΑΒ με τέμνουσα την ΔΒ)

άρα οι ίσοι λόγοι ομοιότητας είναι

$$\frac{OA}{OΓ}=\frac{OB}{OΔ}=\frac{AB}{ΔΓ}$$

Δ2 i) $OA=\frac{2\left(x^2+4x+4\right)}{x+2}=\frac{2\left(x+2\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+2}}=2\left(x+2\right)$, $x\neq -2$

$OB=\frac{(x+6)\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=x+6$, $x\neq 3$

$O\Delta=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$, $x\neq 1$

$O\Gamma=\frac{2(x^2-2x+1)}{x-1}=\frac{2(x-1)^2}{x-1}=2(x-1)$, $x\neq 1$

Δ3 ii) $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{OB}{O\Delta}\Rightarrow\frac{\cancel{2}\,(x+2)}{\cancel{2}\,(x-1)}=\frac{x+6}{x+1}\Leftrightarrow$

περιορισμοί
χ≠-2, 1, 3, -1

$(x+2)(x+1)=(x+6)(x-1)\Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}+x+2x+2=\cancel{x^2}-x+6x-6\Leftrightarrow$

$3x+2=5x-6\Rightarrow 2x=8\Rightarrow x=4$ Δεκτή